МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
В Г. ВОЛГОДОНСКЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

(Институт технологий (филиал) ДГТУ в г. Волгодонске)

УТВЕРЖДАЮ
Директор
И.В. Столяр
«26» апреля 2022 г.

Методические указания по организации самостоятельной работы по дисциплине «Сопротивление материалов» для обучающихся по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств профиль Технология машиностроения

2022 года набора

Волгодонск
2022

Лист согласования

Методические указания по организации самостоятельной работы по дисциплине «Сопротивление материалов» составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки (специальности)

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «*ТСиИТ*» протокол № 9 от «26» апреля 2022 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий практикум содержит задания, выполнение которых поможет студентам освоить дисциплину «Сопротивление материалов», позволит овладеть методикой решения задач и основами инженерных расчетов типовых элементов конструкций на прочность и жесткость. Самостоятельная работа над заданиями даст возможность студентам приобрести необходимые навыки в решении задач, в выборе методики расчетов по указанным темам дисциплины. Эти навыки и полученные знания позволят применить изученные методы к решению практических задач и послужат основой для решения специальных заданий проектирования и конструирования инженерных конструкций соответственно направлению, по которому обучаются студенты.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задание 1

Задача № 1. *Тема задачи*: Проектировочный расчет стержня на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.

Для заданного стержня (рис. 1) требуется:

- найти реакцию заделки:

- построить эпюру продольной силы N;

- записать условие прочности;

- найти площадь поперечного сечения стержня;

- определить полное изменение длины стержня Δl.

Численные значения заданных сил и линейных размеров указа-ны на рис. 1. При расчете принять $[\sigma]$= 180 МПа.

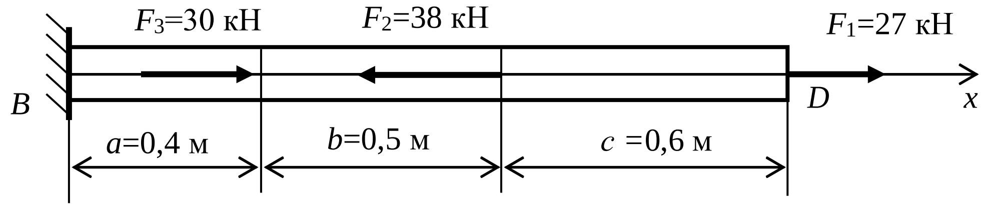
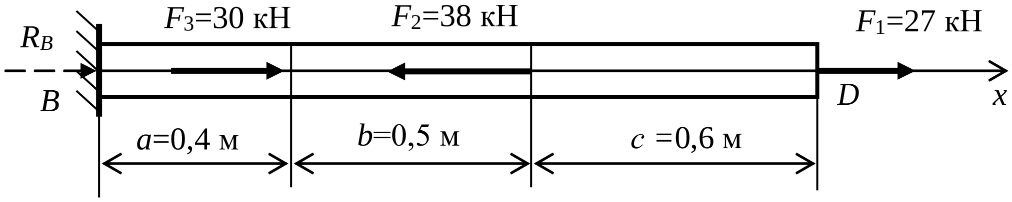


Рис. 1

Решение

1. Изображаем расчетную схему стержня с указанием численных значений сил, линейных размеров (рис. 2). Показываем предварительно направление реакции заделки R_B в положительном направлении оси x.



2.

Рис. 2

Составляем уравнение равновесия проекций сил на ось x:

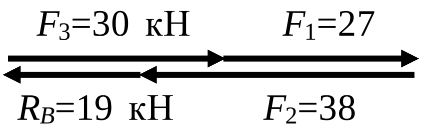
$$\sum X = 0;\ F_1 - F_2 + F_3 + R_B = 0.$$

Определяем реакцию заделки:

$$R_B = -F_1 + F_2 - F_3 = -27 + 38 - 30 = -19 \text{ кН}.$$

Знак минус означает, что реакция R_B направлена не вправо, как

принимали при составлении уравнения равновесия, а влево. На рас- четной схеме для дальнейших расчетов надо указать действительное направление реакции (рис. 3). Правильность определения реакции легко проверить, если сложить силы, направленные вправо (F_1, F_3) и силы, направленные влево (F_2, R_B), Результаты сложения должны быть одинаковые («сколько вправо,



столько влево»). Выполним проверку графически:

На расчетной схеме показываем силы, приложенные к стержню и реакцию заделки в действительном направлении (рис. 3; 4,а).

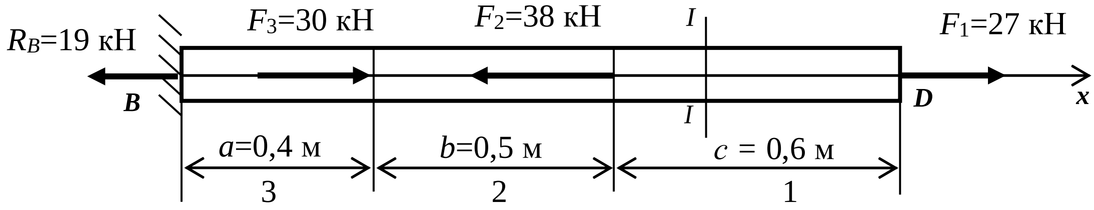
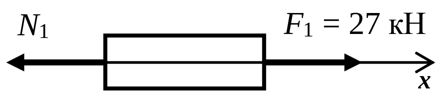


Рис. 3

1. Разбиваем стержень на участки, в нашем случае три участка, номера участков 1, 2, 3 можно проставлять слева направо или справа налево, как на рис. 11. Методом сечений определяем продольную силу на каждом участке.

Участок 1. Проводим мысленно секущую плоскость *I-I* на первом участке стержня (рис. 12, *а*). Рассмотрим отсеченную правую часть стержня. Продольную силу N_1 принимаем положительной и показываем её «от сечения», т. е. считаем первый участок растянутым. Таким же образом неизвестную продольную силу надо изображать на всех участках. Составляем уравнение равновесия для отсеченной правой части стержня:

$$X = 0; \quad F_1 - N_1 = 0;$$

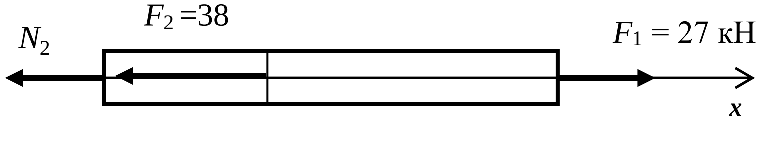


Отсюда $N_1 = F_1 = 27$ кН,

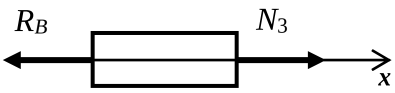
$N_1 > 0$ - растяжение.

Участок 2. Проводим секущую плоскость *II-II* (рис. 12, *а*) на втором участке. Рассмотрим отсеченную правую часть стержня. Уравнение равновесия для отсеченной части стержня: $X = 0$; $F_1 - F_2 - N_2 = 0$;

$$N_2 = F_1 - F_2 = 27 - 38 = -11 \text{ кН}; \; N_2 < 0 - \text{сжатие.}$$



Участок 3. Проводим секущую плоскость *III-III* на третьем участке (рис. 12, *а*). Рассмотрим левую отсеченную часть стержня.



Уравнение равновесия для этой части:

$X = 0$; $N_3 - R_B = 0$;

$N_3 = R_B = 19$ кН; $N_3 > 0$ − растяжение.

По найденным значениям продольных сил N_i строим эпюру N (рис. 12, *б*). Численные значения продольных сил на участках стержня откладываем в выбранном масштабе.

2. Условие прочности при растяжении– сжатии стержня при постоянной площади поперечного сечения A = *const*:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma .$$

Здесь σ_{max} − наибольшее по модулю нормальное напряжение;

N_{max} - наибольшая по модулю продольная сила;

A – площадь поперечного сечения стержня;

σ − допускаемое напряжение для материала стержня.

Из условия прочности находим площадь поперечного сечения стержня:

$$A \geq \frac{N_{max}}{\sigma} = \frac{N_1}{\sigma} = \frac{27 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 1{,}5\ \text{см}^2.$$

3. Определяем нормальные напряжения на участках стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_{x1}}{A} = \frac{27 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 180 \cdot 10^6\ \text{Па} = 180\ \text{МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_{x2}}{A} = \frac{-11 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = -73{,}3 \cdot 10^6\ \text{Па} = -73{,}3\ \text{МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{x3}}{A} = \frac{19 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 126{,}6 \cdot 10^6\ \text{Па} = 126{,}6\ \text{МПа}.$$

На всех участках условие прочности выполнено:

$$\sigma_i \leq \sigma = 180\ \text{МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 12, *в*). По виду эпюра нормальных напряжений подобна эпюре продольных сил, но ординаты в масштабе равны нормальным напряжениям в соответст- вующих сечениях стержня

а) R_B=19 кН B

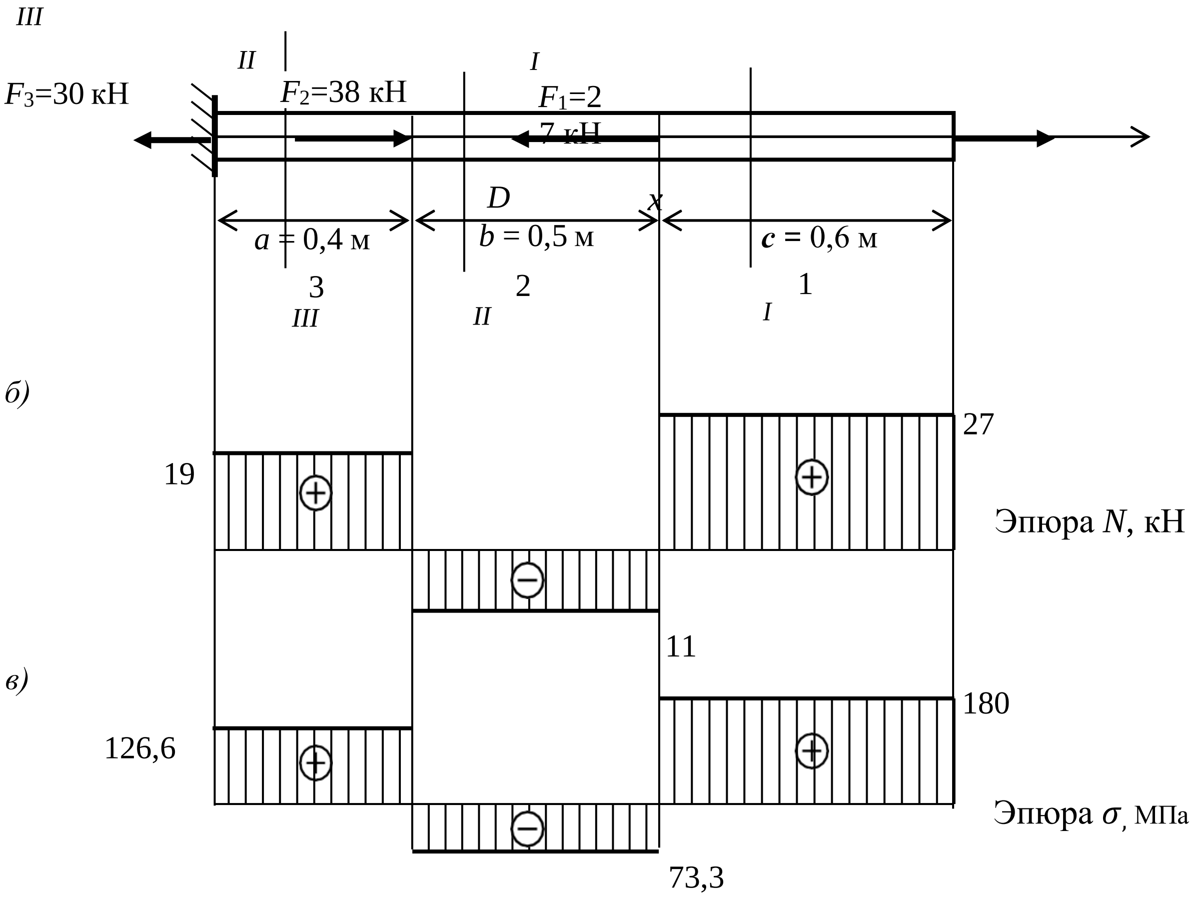


Рис. 4

5. Определяем изменение длины на участках стержня по формуле

$$\Delta l_i = \frac{N_{xi} l_i}{EA},$$

где EA – жесткость поперечного сечения стержня:

$$EA = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^7 \text{ Н}.$$

Тогда:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{x1} l_1}{EA} = \frac{N_{x1} c}{EA} = \frac{27 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{3 \cdot 10^7} = 5{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}54 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{x2} l_2}{EA} = \frac{N_{x1} b}{EA} = \frac{-11 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{3 \cdot 10^7} = -1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0{,}18 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{x3} l_3}{EA} = \frac{N_{x1} a}{EA} = \frac{19 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{3 \cdot 10^7} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}25 \text{ мм}$$

6. Находим полное изменение длины стержня:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = 0{,}54 - 0{,}18 + 0{,}25 = 0{,}61 \text{ мм}.$$

Расчетную схему стержня и эпюры строим на одном листе формата А-4 (рис. 4), на схеме и эпюрах указываем численные значения заданных величин и величины, полученные в результате расчета.

Ответ: Площадь поперечного сечения стержня A = 1,5 см^2. Условие прочности выполнено на всех участках стержня. Изменение длины стержня (удлинение) $\Delta l = 0{,}61$ мм.

Задача № 2. *Тема задачи:* Проектировочный расчет стержня (вала) на прочность и жесткость при кручении.

Для заданного вала требуется:

- определить момент M_0;

- найти крутящие моменты на участках вала и построить эпюру $M_к$;

- определить диаметр вала из условия прочности при кручении;

- определить наибольшие касательные напряжения на участках вала и построить эпюру r_{max};

- найти углы закручивания на участках вала φ_j и полный угол закручивания φ.

Численные значения заданных моментов и линейных размеров показаны на рис. 5, *а*. При расчете принять $[r] = 30$ МПа.

Решение

1. Изображаем схему вала с указанием численных значений линейных размеров и заданных моментов (рис. 5, *а*).

2. Находим момент заделки M_0 из уравнения внешних моментов относительно оси x:

$$\sum M_{\boldsymbol{x}} = 0; \quad -M_1 + M_2 + M_4 + M_0 = 0;$$

отсюда $M_0 = M_1 - M_2 - M_4 = 600 - 900 - 200 = -500$ Н · м.

Знак минус означает, что момент M_0 направлен не против хода часовой стрелки, а по ходу часовой стрелки, *учтем это на схеме, покажем момент M_0 в действительном направлении.*

3. Разбиваем вал на участки, обозначаем их номерами 1, 2, 3.

4. На каждом участке проводим мысленно секущую плоскость (рис. 5, *б*) и составляем уравнение равновесия моментов относительно оси *x* для отсеченных частей вала, включая в эти уравнения крутящие моменты на каждом участке.

Участок 1: $\sum M_x = 0; \; -M_1 + M_{к1} = 0$ - для левой отсеченной части $M_{к1} = M_1 = 600$ Н · м.

Участок 2: $\sum M_x = 0; \; -M_1 + M_2 + M_{к2} = 0;$

$$M_{к2} = M_1 - M_2 = 600 - 900 = -300\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Участок 3 $\sum M_x = 0; \; -M_0 - M_{к3} = 0$ - для правой отсеченной части, $M_{к3} = -M_0 = -500$ Н · м.

Отсеченные части вала показаны на рис.13, *б.*

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 5, *в*). Наибольшее значение крутящего момента

$$M_{кmax} = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Условие прочности при кручении

$$r_{max} = \frac{|M_к|_{max}}{W_p} \le [r].$$

Здесь $W_P = \frac{\pi d^3}{16}$ - полярный момент сопротивления сечения вала.

6. Из условия прочности найдем W_P:

$$W_p \ge \frac{|M_к|_{max}}{[r]} = \frac{600}{30 \cdot 10^6} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 20 \text{ см}^3.$$

Отсюда $d \ge \sqrt[3]{\frac{16W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 20}{3{,}14}} = {}^3\,\overline{101{,}91} = 4{,}67$ см.

Диаметр вала можно также найти по формуле:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16\ M_{к\ max}}{\pi\ \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600}{3{,}14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 4{,}67 \cdot 10^{-2}м = 4{,}67\ см =$$

$$= 46{,}7\ мм.$$

7. Находим значения наибольших касательных напряжений на участках вала для расчетного значения диаметра d = 4,67 см.

Участок 1: $r_{max\ 1} = \frac{M_{к1}}{W_p} = \frac{600}{20 \cdot 10^{-6}} = 30 \cdot 10^6$ Па $= 30$ МПа.

Участок 2: $r_{max\ 2} = \frac{M_{к2}}{W_p} = \frac{-300}{20 \cdot 10^{-6}} = -15 \cdot 10^6$Па $= -15$МПа.

Участок 3: $r_{max\ 3} = \frac{M_{к3}}{W_p} = \frac{-500}{20 \cdot 10^{-6}} = -25 \cdot 10^6$ Па $= -25$ МПа.

По найденным значениям строим эпюру наибольших касательных напряжений на участках вала (рис. 5, *г)*. Все значения напряжений на этой эпюре соответствуют условию прочности при кручении:

$$|r_j|_{max} \leq [r],$$

j – номер участка.

Условие прочности выполнено на всех участках.

8. Находим углы закручивания (углы поворота сечений) на каждом участке вала по формуле:

$$\varphi_j = \frac{M_{кj}\, l_j}{GI_p}.$$

Здесь l_j – длина участка;

G – модуль сдвига, для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа;

$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = W_p \cdot \frac{d}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 4{,}67^4}{32} = 46{,}67$ см^4 – полярный момент инерции круглого поперечного сечения вала;

$GI_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 46{,}67 \cdot 10^{-8} = 373{,}36 \cdot 10^2$ Н · м^2 – жесткость поперечного сечения вала при кручении.

Участок 1: $\varphi_1 = \frac{600 \cdot 0{,}22}{373{,}36 \cdot 10^2} = 0{,}354 \cdot 10^{-2}$рад $= 0{,}20$ град.

Участок 2: $\varphi_2 = \frac{-300 \cdot 0{,}35}{373{,}36 \cdot 10^2} = -0{,}281 \cdot 10^{-2}$рад $= -0{,}16$ град.

Участок 3: $\varphi_3 = \frac{-500 \cdot 0{,}18}{373{,}36 \cdot 10^2} = -0{,}241 \cdot 10^{-2}$рад $= -0{,}14$ град.

9. Находим полный угол поворота правого сечения вала относительно левого сечения:

$$\varphi = \sum \varphi_j = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0{,}20 - 0{,}16 - 0{,}14 = -0{,}1 \text{ град.}$$

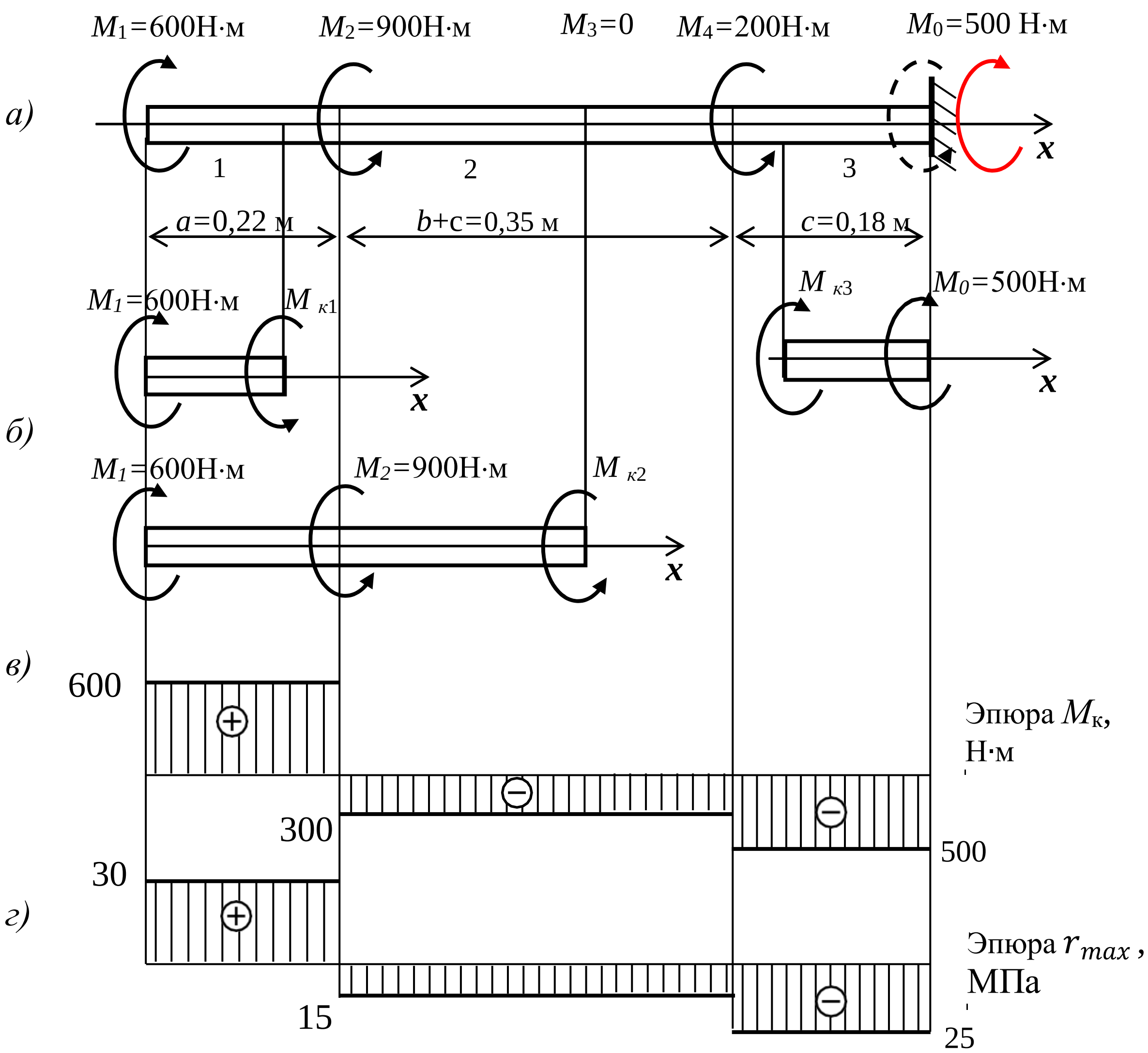


Рис. 5

Ответ: Диаметр вала d = 4,67 см;
полный угол закручивания φ = – 0,153 град.

Задача № 3. *Тема задачи*: проектировочный расчет на прочность стержня (балки) при прямом изгибе.

Условие задачи см. задание 1, задача № 3. Схема (а) (двухопорная консольная балка), численные значения заданных величин указаны на схеме балки (рис. 6).

Решение

1. Изображаем расчетную схему балки с указанием численных значений нагрузки и линейных размеров. Распределенную нагрузку приводим к равнодействующей $Q = qb$.

2. Находим реакции опор. Составляем уравнения равновесия моментов относительно точек A и B (рис. 6):

$$\sum M_A = 0;\ \ Fa + M - Q\frac{b}{2} + R_B b = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{b}\left(-Fa - M + Q\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(-8 \cdot 1{,}5 - 15 + 30 \cdot \frac{3}{2}\right) = 6\ \text{кН}.$$

$$\sum M_B = 0;\ \ F(a+b) + Q\frac{b}{2} + M - R_A a = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{b}\left(F(a+b) + Q\frac{b}{2} + M\right) = \frac{1}{3}\left(8(1{,}5+3) + 30\frac{3}{2} + 15\right) = 32\ \text{кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$\sum Y = 0; -F + R_A - Q + R_B = 0; -8 + 32 - 30 + 6 = 0; 0 = 0$ – Реакции опор найдены верно. Реакции опор показываем на схеме балки в действительном направлении (рис.15, *а*).

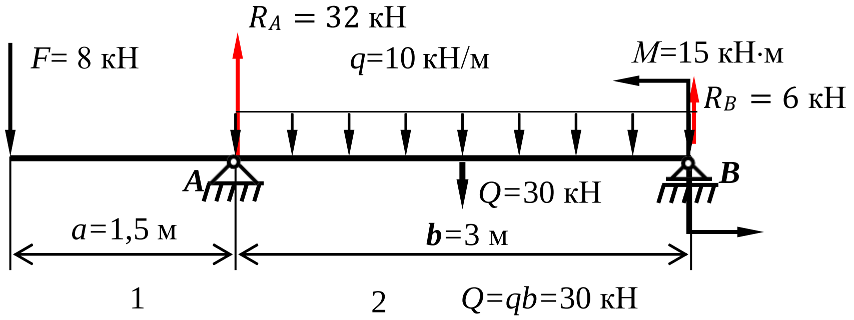


Рис. 6

3. Разбиваем балку на участки – два участка, номера участков (1, 2) указываем на схеме балки.

4. На каждом участке методом сечений определяем поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z. Для отсеченной части балки составляем уравнения равновесия проекций сил на ось y и уравнения равновесия моментов относительно оси z, проходящей через поперечное сечение (см. рис.15, *б*).

Участок 1 $(0 \leq x_1 \leq a)$:

$$\sum Y = 0;\ -Q_y - F = 0;\ \ Q_y = -F = -8 \text{ кН};$$

$$\sum M_z = 0;\ M_{z1} + Fx_1 = 0;\ \ M_{z1} = -Fx_1;$$

$M_{z1}(0) = 0;\ M_{z1}(a) = M_{z1}(1{,}5) = -8 \cdot 1{,}5 = -12$кН·м.

Участок 2 $(0 \leq x_2 \leq b)$: координату x_2 откладываем от сечения *B* справа налево

$$\sum Y = 0;\ Q_{y2} + R_B - qx_2 = 0;$$

$$Q_{y2} = -R_B + qx_2;$$

$$Q_{y2}(0) = -R_B = -6 \text{ кН}, \text{ в сечении В};$$

$$Q_{y2}(b) = Q_{y2}(3) = -R_B + qb =$$

$$-6 + 10 = 24 \text{ кН}, \text{ в сечении } A.$$

$$M_z = 0;\ \ M + R_B x_2 - qx_2 \frac{x_2}{2} - M_{z2} = 0;$$

$$M_{z2} = M + R_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2};$$

$$M_{z2}(0) = M = 15 \text{ кН·м};$$

$$M_{z2}(b) = M + R_B b - \frac{qb^2}{2} = 15 + 6 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 3^2}{2} = -12 \text{ кН·м}.$$

Определим положение сечения на участке 2, в котором поперечная сила Q_{z2} равна нулю, а изгибающий момент M_{z2} имеет максимальное значение:

$$Q_{y2} = 0 \text{ при } x_2^* = \frac{R_B}{q} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ м};$$

$$M_{z2max} = M + R_B x_2^* - \frac{qx_2^{*2}}{2} = 15 + 6 \cdot 0{,}6 - \frac{10 \cdot 0{,}6^2}{2} = 16{,}8 \text{ кН м}.$$

По полученным значениям строим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z (рис. 7, *в*, *г*). Положительные значения откладываем на эпюрах вверх от базовой линии (оси эпюры), отрицательные - вниз, при этом эпюру M_z строим на сжатых волокнах.

5. По эпюре изгибающего момента находим опасное сечение:

$$|M_z|_{max} = 16{,}8 \text{ кН·м}.$$

6. Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \le [\sigma].$$

Отсюда

$$W_z \ge \frac{|M_z|_{max}}{[\sigma]} = \frac{16{,}8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 105 \cdot 10^6 \text{ м}^3 = 105 \text{ см}^3$$

7. По найденному значению осевого момента сопротивления W_z находим размеры заданного поперечного сечения балки.

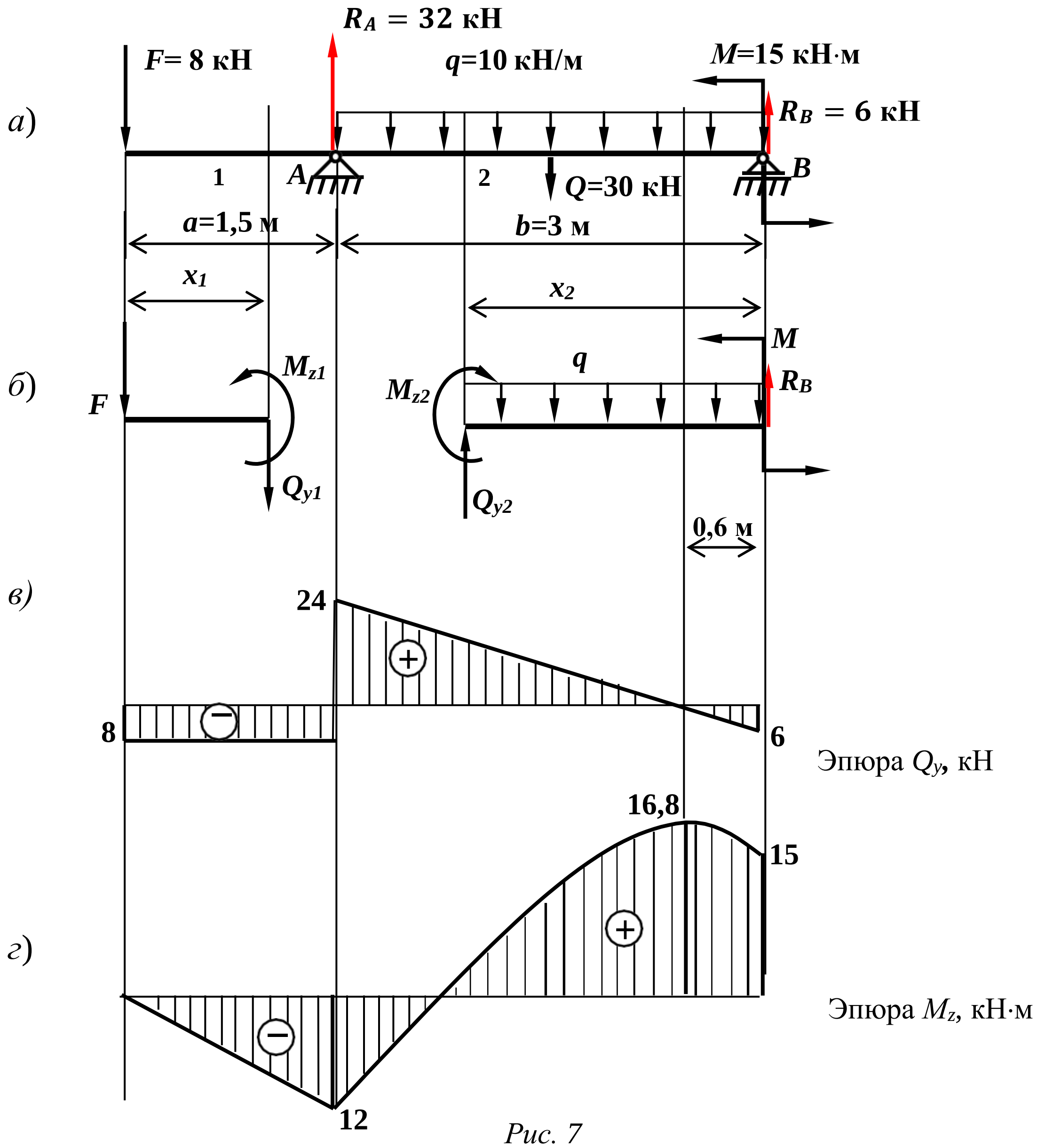


Рис. 7

По таблице (приложение 3) подбираем номер двутавровой балки, ближайшее большее значение осевого момента сопротивления:

$$W_z = W_{x\ \text{табл}} = 109\ \text{см}^3,$$

что соответствует двутавру № 16.

8. Проверим выполнение условия прочности. Наибольшее нормальное напряжение для выбранной балки № 16:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z\ max}}{W_z} = \frac{16{,}8 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 154{,}1 \cdot 10^6\ \text{Па} = 154{,}1\ \text{МПа}.$$

Определим отклонение нормального напряжения от допускаемого:

$$\Delta\sigma = \frac{160 - 154{,}1}{160} 100\% = 3{,}7\%.$$

Балка недогружена на 3,7%, что допускается ($\Delta\sigma \leq \pm 5\%$).

Ответ: Двутавровая балка № 16.

Задача № 3, схема б, рис. 8 (консоль).

Порядок решения см. задачу № 3, схема а. Численные значения заданных сил и моментов, линейных размеров показаны на рис. 8, *а*.

Решение

1. Изображаем заданную балку (консоль) с указанием численных значений силы F и момента M, линейных размеров (рис. 8, *а*).

2. Находим реакции заделки из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0;\ -M + F(a + c) + M_A = 0.$$

Момент заделки $M_A = M - F(a + c) = 20 - 12(2 + 3) = -40$ кН·м; $-\ M_A$ направлен по ходу часовой стрелки (рис. 8, *а)*.

$\sum Y = 0$; $F - R_A = 0$; $R_A = F = 12$ кН – реакция R_A направлена вниз, как показано на рис. 8, *а*.

Проверку правильности определения реакций заделки можно выполнить, составив уравнение равновесия моментов относительно какой-либо точки (B или D) и убедившись в его выполнении:

$\sum M_B = 0; R_A(a + c) - M - M_A = 0; 12(2 + 3) - 20 - 40 = 0;$

0 = 0 – реакции найдены верно.

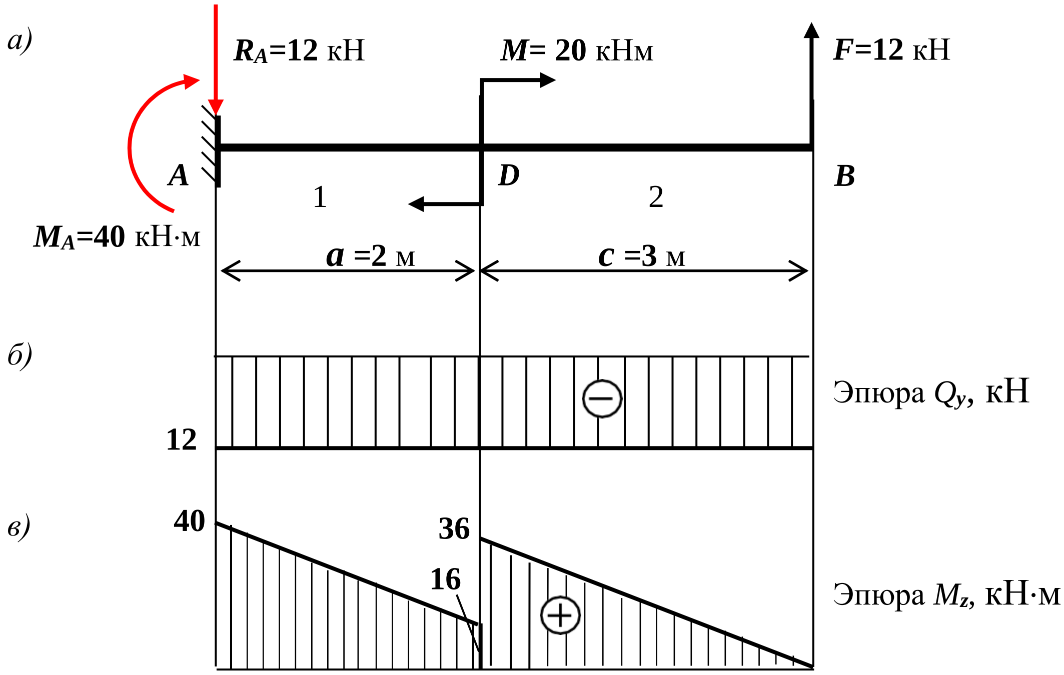


Рис. 8

3. Разбиваем балку на участки, на схеме балки указываем номера участков – 1, 2 (рис. 8, *а*).

4. На каждом участке методом сечений определяем внутренние усилия – поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq a = 2$м; $Q_{y1} = -R_A = -12$ кН;

$M_{z1} = M_A - R_A \cdot x_1 = 40 - 12 \cdot x_1$; $M_{z1}(0) = M_A = 40$ кН·м

$M_{z1}(a) = M_A - R_A \cdot a = 40 - 12 \cdot 2 = 16$ кН·м.

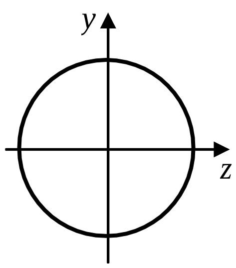
Участок 2: : $0 \leq x_2 \leq c = 3$ м; $Q_{y2} = -F = -12$ кН $= Q_{y1}$.

$M_{z2} = F \cdot x_2 = 12 \cdot x_2$; $M_{z2}(0) = 0$;

$M_{z2}(c) = F \cdot c = 12 \cdot 3 = 36$ кН·м.

5. По эпюре M_z находим наибольший изгибающий момент

$$M_{z\,max} = 40 \text{ кН·м}.$$



6. Условие прочности при изгибе

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \le [\sigma].$$

Здесь $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ - осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения вала.

Условие прочности можно записать в виде:

$$|\sigma|_{max} = \frac{32|M_z|_{max}}{d^3\pi} \le [\sigma],$$

отсюда получим:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32\ M_{z\ max}}{\pi\ \sigma}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 40 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 34{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = 34{,}4\ \text{см}.$$

Осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения балки

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 34{,}4^3}{32} = 3994{,}4\ \text{см}^3.$$

Наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении балки

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} = \frac{40\cdot10^3}{3994{,}4\cdot10^{-6}} = 10{,}01 \cdot 10^6\ \text{Па} = 10{,}01\ \text{МПа}.$$

Условие прочности выполнено, $\sigma_{max} \approx [\sigma]$. Наибольшее нормальное напряжение незначительно отличается от допускаемого ($\Delta\sigma \approx 0{,}1$ %), что объясняется округлением результатов численных расчетов.

Ответ: Диаметр круглого сечения балки d = 34,4 см.

Задача № 4*. Тема задачи*: Геометрические характеристики плоских сечений.

Для заданного плоского сечения (рис. 9) требуется:

- определить положение центра тяжести;
- построить главные центральные оси;
- определить главные центральные моменты инерции.

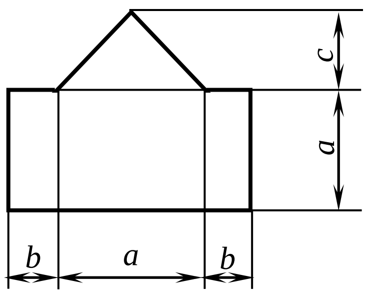


Рис. 9

Данные для расчета: a = 80 мм, b= 20 мм , c = 60 мм.

Решение

1. Изображаем заданное сечение в масштабе (рис. 10). Для удобства расчета размеры указываем в сантиметрах. На рисунках 18, 19 последовательно показан порядок построений, необходимых для расчета. При выполнения задания все построения можно изображать на одном рисунке.

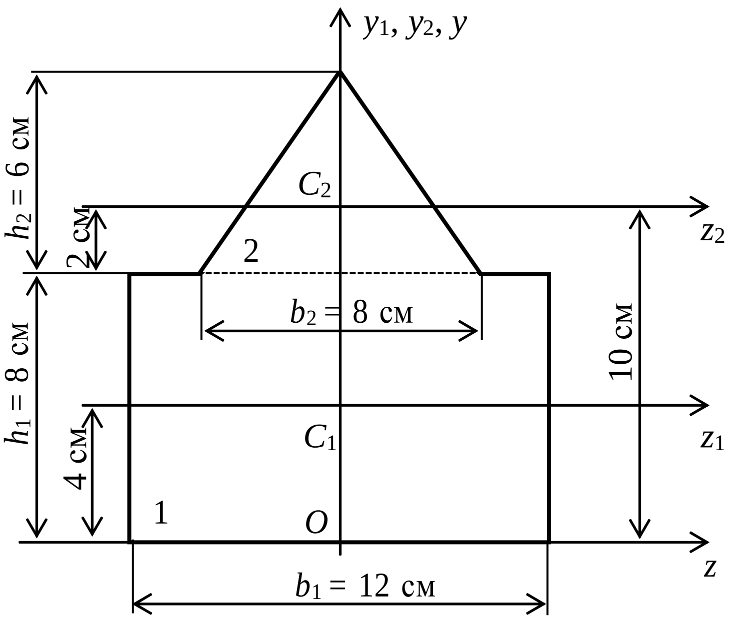


Рис.18

2. Разбиваем сечение на две части – прямоугольник 1 и треугольник 2 (рис. 10). Для каждой части показываем положение центра тяжести (точки C_1 и C_2) и главные центральные оси – для прямоугольника оси $z_1C_1y_1$, для треугольника – $z_2C_2y_2$.

3. Выбираем вспомогательную систему координат zOy (рис. 10) относительно которой будем определять положение центра тяжести сечения C, ось y совмещаем с осью симметрии сечения, а ось z – с основанием сечения. По таблице (приложение 2) находим формулы, необходимые для расчета.

4. Определяем координаты центра тяжести сечения:

- площади частей сечения:

$$A_1 = b_1h_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{1}{2}b_2h_2 =\cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$

- координаты центров тяжести частей 1 и 2 в осях системы координат *zOy* (рис. 11): $z_{C1} = z_{C2} = 0$; $y_{C1} = 4$ см; $y_{C2} = 10$ см.

- определяем координаты центра тяжести заданного сечения в осях системы координат *zOy*:

$$z_C = 0; \quad y_C = \frac{A_i y_{Ci}}{A_i} = \frac{96 \cdot 4 + 24 \cdot 10}{96 + 24} = 5{,}2 \text{ см};$$

- п оказываем на схеме координату y_C и ценр тяжести точку C (рис. 11).

5. Проводим главные центральные оси сечения $z_c C y_c$.

6. Вычисляем главные центральные моменты инерции симметричного сечения сечения относительно главных центральных осей z_C и y_C:

- расстояния между главной центральной осью z_C и осями z_1, z_2

$$a_1 = 5{,}2 - 4 = 1{,}2 \text{ см}; \; a_2 = 10 - 5{,}2 = 4{,}8 \text{ см};$$

- расстояния $b_1 = b_2 = 0$, так как оси y_1, y_2 и y_C совпадают;

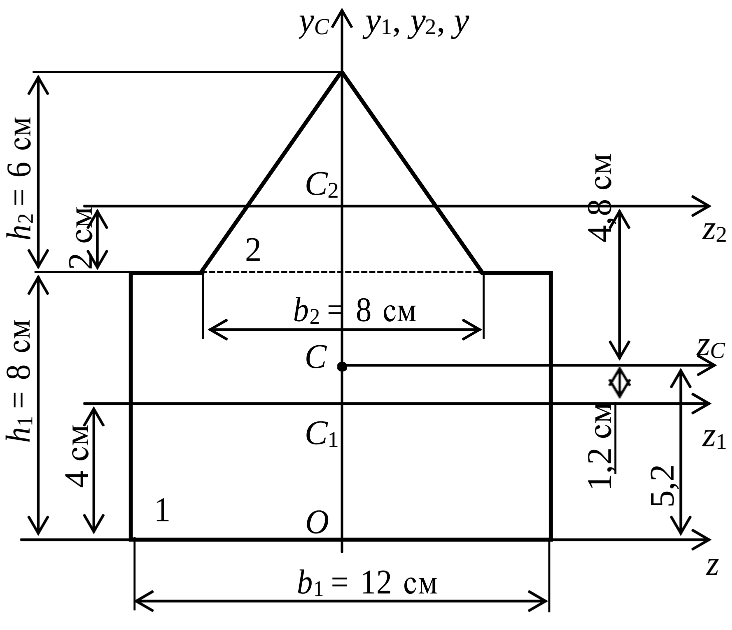


Рис. 11

- главные центральные моменты инерции сечения:

$$I_{z_C} = \sum\left(I_{z_i} + a_i^2 A_i\right) = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1\right) + \left(\frac{b_2 h_2^3}{36} + a_2^2 A_2\right) =$$

$$= \left(\frac{12 \cdot 8^3}{12} + 1{,}2^2 \cdot 96\right) + \left(\frac{8 \cdot 6^3}{36} + 4{,}8^2 \cdot 24\right) = 1251{,}2 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum\left(I_{y_i} + b_i^2 A_i\right) = \frac{b_1^3 h_1}{12} + \frac{b_2^3 h_2}{48} = \frac{12^3 \cdot 8}{12} + \frac{8^3 \cdot 6}{48} = 1216 \text{ см}^4.$$

Ответ: Центр тяжести сечения точка C и главные центральные оси $z_C C y_C$ показаны на рис. 11, главные центральные моменты инерции $I_{z_C} = 1251{,}2$ см^4; $I_{y_C} = 1216$ см^4.

Задание 2

Задача №1. *Тема задачи*: Расчет на прочность балки при косом (сложном) изгибе.

Балка с поперечным сечением в виде прямоугольника с соотношением размеров $h/b=k$ (h – высота, b – ширина) нагружена силами (F, q) и моментами (M), действующими в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 12). Требуется:

- определить внутренние усилия в поперечных сечениях балки в главных плоскостях;
- построить эпюры внутренних усилий;
- из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения балки b и h;
- проверить выполнение условия прочности по нормальным напряжениям при найденных размерах;
- построить эпюру нормальных напряжений σ в опасном сечении .

Данные для расчета: a = 4 м; c = 2 м; k = 2; F = 12 кН; q = 6 кН/м; $k = h/b = 2$; M = 16 кНм; $[\sigma]$ = 160 МПа.

Решение

1. Изображаем расчетную схему балки согласно исходным данным с указанием размеров и нагрузки (рис. 12).

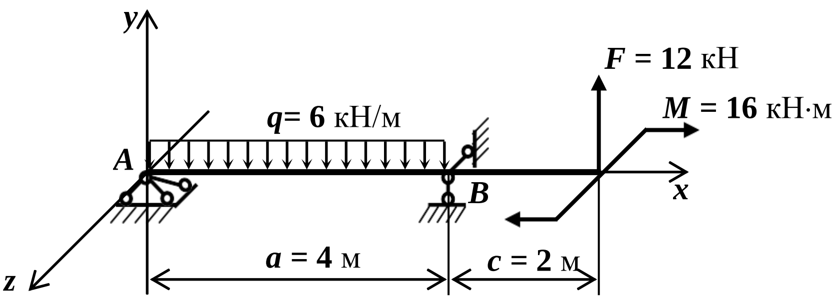


Рис. 12

2. Показываем схему балки в *вертикальной плоскости xy* (рис. 13, *а*).

Реакции опор в плоскости xy находим из уравнений равновесия моментов относительно точек A и B:

$$\sum M_A = 0;\ R_{By}a - Q\frac{a}{2} + F(a+b) = 0;$$

$$R_{By} = \frac{1}{a}\left(\frac{Qa}{2} F(a+b)\right) = \cdots = -6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;\ -R_{Ay}a + Q\frac{a}{2} + Fb = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{a}\ \frac{Qa}{2} + Fb\ = \cdots = 18 \text{ кН}.$$

Знак минус реакции R_{By} означает, что реакция направлена не вверх, как приняли при составлении уравнения равновесия, а вниз (рис. 13, *а*). Выполняем проверку правильности определения реакций опор:

$$\sum Y = 0; \quad R_{Ay} - Q - R_{By} + F = 0; \quad 18 - 24 - 6 + 12 = 0; 0 = 0.$$

Реакции опор найдены верно. Реакции опор показываем на расчетной схеме в действительном направлении (красные векторы).

Определяем поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z на участках балки 1 и 2 в плоскости xy (подробное решение см. пример задание1, задача № 3):

Участок 1, $0 \le x_1 \le a$:

$Q_{y1} = R_{Ay} - qx_1;$

$Q_{y1}(0) = R_{Ay} = 18$ кН;

$Q_{y1}(a) = R_{ay} - qa = 18 - 6 \cdot 4 == -6$ кН;

$$M_{z1} = R_{Ay}x_1 - \frac{q{x_1}^2}{2};$$

$$M_{z1}(0) = 0;\ \ M_{z1}(a) = R_{Ay}\,a - \frac{qa^2}{2} = 18 \cdot 4 - \frac{6 \cdot 4^2}{2} = 24\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Определим положение сечения D, в котором поперечная сила Q_{y1} равна нулю, а изгибающий момент M_{z1} имеет экстремальное значение (максимум) (рис. 13, *а*):

$$Q_{y1} = R_{Ay} - qx_1^* = 0;\ \ x_1^* = \frac{R_{Ay}}{q} = \frac{18}{6} = 3\text{м};$$

Изгибающий момент в этом сечении равен

$$M_{z1}\ x_1^* = R_{Ay}x_1^* - \frac{qx_1^{*2}}{2} = 18 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 3^2}{2} = 27\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2, для правой отсеченной части балки $0 \le x_2 \le$ с;

$$Q_{y2} = -F = -12\ \text{кН},$$
$$M_{z2} = Fx_2;\quad M_{z2}(0) = 0;\ M_{z2}(\text{c}) = F\text{c} = 12 \cdot 2 = 24\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

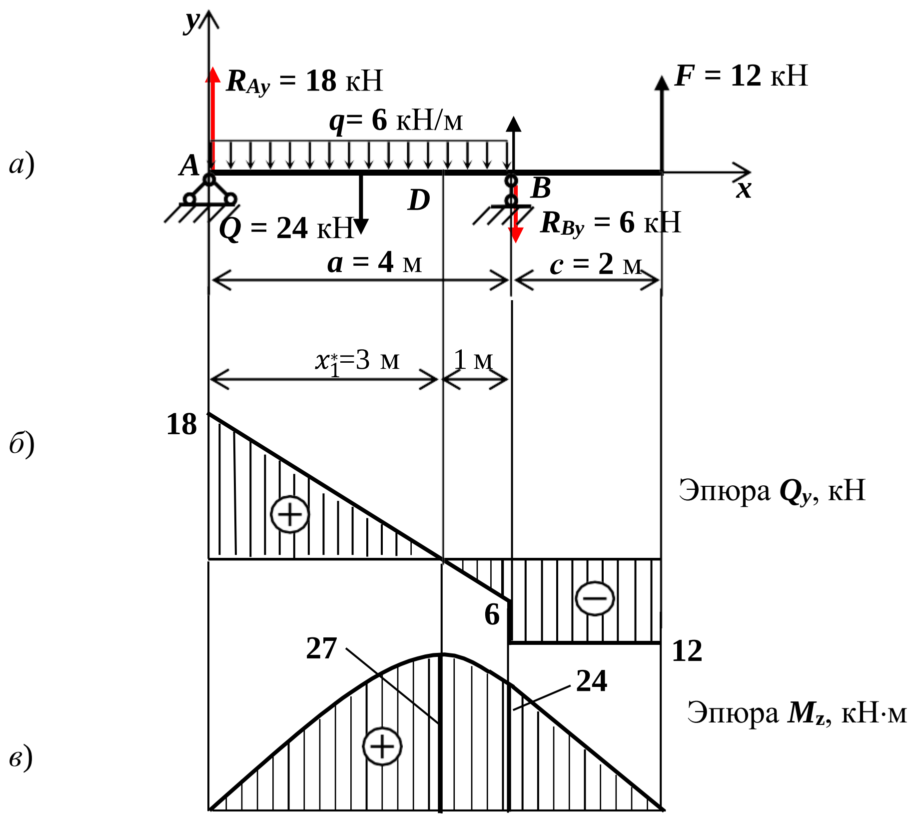


Рис. 13

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_z. Эпюры изгибающих моментов строим на сжатых волокнах (12, *б*, *в*).

В горизонтальной плоскости xz на балку действует пара сил с моментом M = 16 кН·м (рис. 14, *а*). Реакции опор образуют пару сил с таким же по величине моментом, направленным противоположно внешнему моменту M:

$$R_{Az} = R_{Bz} = \frac{M}{a} = \frac{16}{4} = 4\text{кН}.$$

Определяем поперечную силу Q_z и изгибающий момент M_y на участках балки.

Участок 1: $Q_{z1} = -R_{Az} = -4$ кН, $M_{y1} = -R_{Az}x_1$;

$$M_{y1}(0) = 0, \qquad M_{y1}(a) = R_{Az}a = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2: $Q_{z2} = 0$; $M_{y2} = -M = -16$ кН · м.

По полученным значениям строим эпюры Q_z и M_y (рис. 14, *б*, *в*).

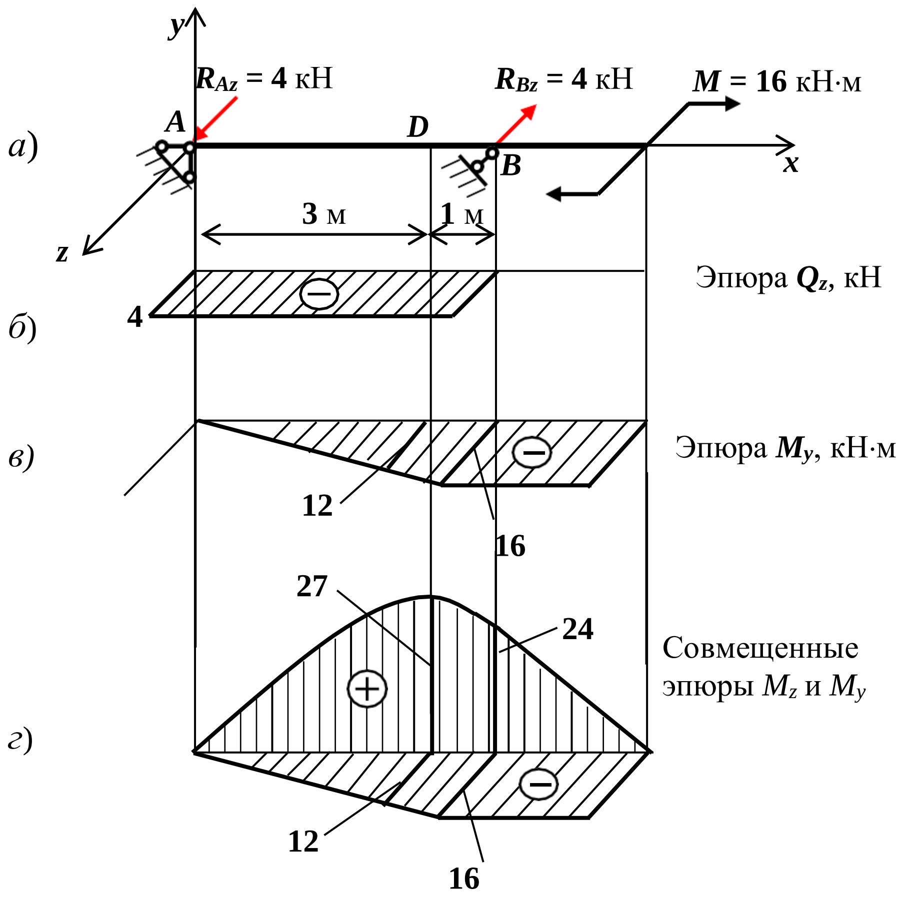


Рис. 14

3. Опасное сечение определим по эпюрам изгибающих моментов. Для наглядности покажем эти эпюры на одной схеме (рис. 14, *г*). Эпюры изгибающих моментов построены на сжатых волокнах.

Рассмотрим опасные сечения *B* и *D*.

Сечение *B*: $M_{zB} = 24$ кН · м, $|M_{yB}| = 16$ кН · м.

Сечение *D*: $M_{zD} = 27$ кН · м, $|M_{yB}| = 12$ кН · м.

4. Начертим поперечное сечение балки и покажем знаки нормальных напряжений от изгибающих моментов (вид на поперечное сечение левой отсеченной части справа – с положительного конца оси *x*) (рис. 14). Знаки напряжений определяем по эпюрам изгибающих моментов – эпюры построены на сжатых волокнах. Определим положение нулевой линии в опасных сечениях

Сечение *B*: $\tan\beta = \frac{M_{yB}}{M_{zB}}\frac{I_z}{I_y} = \frac{M_{yB}}{M_{zB}}k^2 = \frac{16}{24}2^2 = 2{,}67;\;\; \beta = 69{,}5°$.

Сечение *D*: $\beta = 60{,}6°$.

Нулевая линия проходит через четверти сечения с разными знаками нормальных напряжений.

Опасные точки – это точки, наиболее удаленные от нулевой линии. В прямоугольном сечении опасные точки находятся в углах, в которых знаки напряжений от обоих изгибающих моментов совпадают. В нашем случае это точки 1 и 2 (рис. 14). В этих точках величина нормальных напряжений одинакова, в точке 1 напряжение положительное – растяжение, в точке 2 напряжение отрицательное – сжатие.

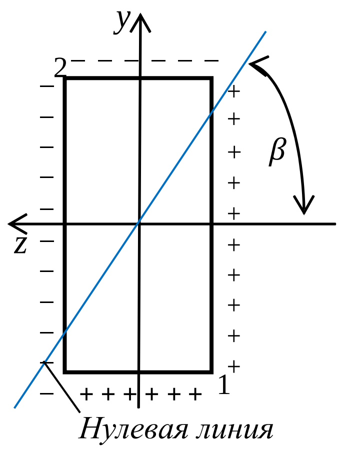


Рис. 14

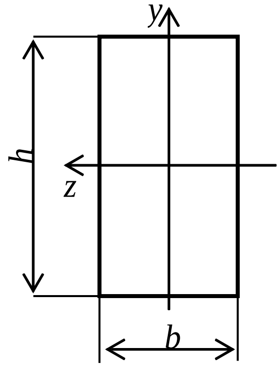


Рис. 15

Геометрические характеристики прямоугольного сечения (рис. 15): $h/b = k$.

Осевые моменты инерции

$I_z = bh^3/12$; $I_y = b^3h/12$; $I_z/I_y = k^2$;

Осевые моменты сопротивления:

$W_z = bh^2/6 = b^3k^2/6$;

$W_y = b^2h/6 = b^3k/6$; $W_z/W_y = k$.

5. Условие прочности для опасной (угловой) точки прямоугольного сечения:

$$\sigma_{max} = \sigma_{\text{о.т.}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma\ .$$

Находим размеры поперечного сечения балки с учетом зависимости между осевыми моментами сопротивления:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_z}{k^2} + \frac{6M_y}{k} / \ \sigma}\ .$$

$$\text{Сечение } B\text{: } b \geq \sqrt[3]{\frac{6\cdot 24}{2^2} + \frac{6\cdot 16}{2}\ \frac{10^3}{160\cdot 10^6}} = 8{,}07 \cdot 10^{-2}\text{м} = 8{,}07\ \text{см.}$$

$$\text{Сечение } D\text{: } b \geq \sqrt[3]{\frac{6\cdot 27}{2^2} + \frac{6\cdot 12}{2}\ \frac{10^3}{160\cdot 10^6}} = 7{,}82 \cdot 10^{-2}\text{м} = 7{,}82\ \text{см.}$$

Выбираем больший размер b =8,07 см, принимаем b=8,1см; h=16,2 см.

6. Определим нормальные напряжения в опасных точках 1 и 2 опасного сечения *B*.

Моменты сопротивления:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{8{,}1 \cdot\ 2 \cdot 8{,}1\ ^2}{6} = 354{,}3\ \text{см}^3,$$

$$W_y = \frac{b^2 h}{6} = \frac{8{,}1^2 \cdot 2 \cdot 8{,}1}{6} = 177{,}15\ \text{см}^3.$$

Нормальное напряжение в опасных точках 1 и 2:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{M_{zB}}{W_z} + \frac{M_{yB}}{W_y} = \frac{24 \cdot 10^3}{354{,}3 \cdot 10^{-6}} + \frac{16 \cdot 10^3}{177{,}15 \cdot 10^{-6}} =$$

$= (67{,}7 + 90{,}3) \cdot 10^6$ Па = 158 МПа.

$\sigma_2 = -158$ МПа.

Напряжения в опасных точках меньше допускаемого напряжения на 2 МПа, недогружение составляет 1,2%, что допустимо. Несовпадение расчетного значения наибольшего напряжения и допускаемого напряжения возникает за счет округления численных значений размеров сечения.

Эпюра нормальных напряжений в сечении B показана на рис. 16.

Ответ: Размеры прямоугольного сечения b=8,1см; h=16,2 см.

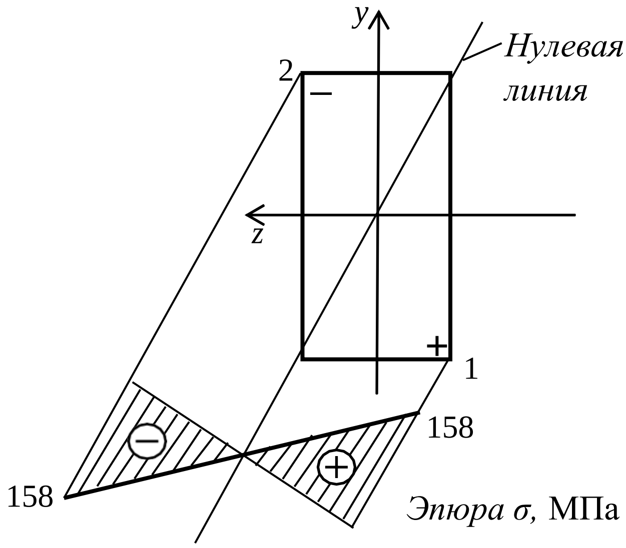


Рис. 16

Задача №2. *Тема задачи*: Расчет на прочность стержня (вала) при изгибе с кручением. Требуется: определить диаметр вала d.

Данные для расчета: схема вала (рис. 17); передаваемая мощность P =15 кВт; угловая скорость вращения вала n = 160 об/мин; D_1 =380 мм, D_2 =180 мм, a = 0,3 м, b = 0,2 м, c = 0,2м; $[\sigma] = 70$ МПа.

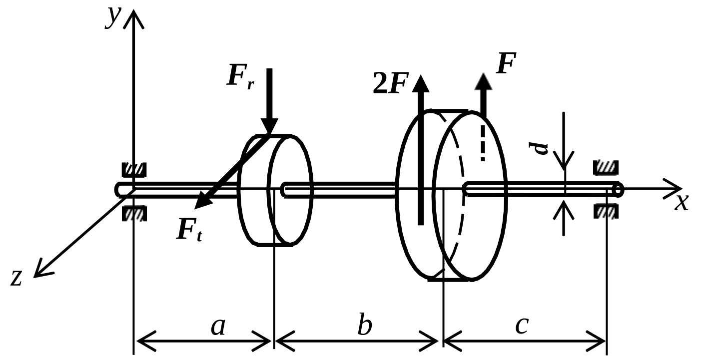


Рис.17

Решение

1. Изображаем схему вала согласно варианту (рис. 19, a).
2. Определяем момент M, приложенный к шкиву от ремня

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 15 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 160} = 896 \text{ Нм} = 0{,}896 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Определяем силу натяжения ремня, D_1 = 380 мм = 0,38 м:

$$F = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 896}{0{,}38} = 4716 \text{ Н} = 4{,}716 \text{ кН} \approx 4{,}72 \text{ кН}.$$

$3F$ = 14,16 кН.

4. Определяем силы, приложенные к колесу:

- окружная сила

$$F_t = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 896}{0{,}18} = 9956 \text{ Н} = 9{,}956 \text{ кН} \approx 9{,}96 \text{ кН}.$$

- радиальная сила

$$F_r = F_t tg\alpha = 9{,}96 \cdot 0{,}364 = 3625 \text{ Н} \approx 3{,}63 \text{ кН}.$$

Здесь $\alpha = 20°$ – угол зацепления зубчатой передачи,

$$tg\, 20° = 0{,}364$$

Вид на шкив и колесо с положительного конца оси x (справа) показан на рис. 18.

5. Составим расчетную схему вала. Приводим силы к оси вала. Точки приложения сил переносим на ось вала x, добавляя моменты присоединенных пар, равных по величине моменту M. Составляем расчетную схему вала (рис. 19, *б*).

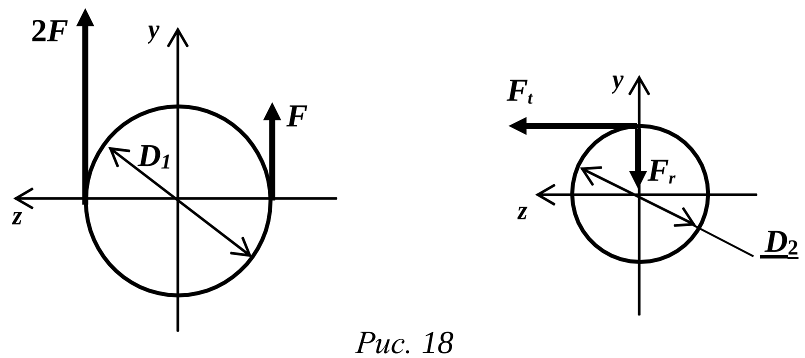


Рис. 18

6. Определяем реакции опор из уравнений равновесия моментов относительно точек A и B:

Плоскость xy: $\sum M_A = 0; \quad -F_r a + 3F(a+b) + R_{By}(a+b+c) = 0;$

$\sum M_B = 0; \quad F_r\,(b+c) - 3Fc - R_{Ay}(a+b+c) = 0.$

Подставляя численные значения сил и линейных размеров в уравнения, найдем вертикальные реакции опор:

$R_{Ay} = -1{,}97$ кН; $R_{By} = -8{,}56$ кН.

Знаки минус означают, что реакции направлены не вверх, как принимали при составлении уравнений, а вниз. На расчетной схеме показываем реакции в действительном направлении, т. е. вниз (рис. 19, *б*). Выполняем проверку правильности определения реакций, составляя уравнение проекций сил на ось y:

$$\sum Y = 0; \quad 3F - F_r - R_{Ay} - R_{By} = 0.$$

Подставляя численные значения сил и реакций, убеждаемся в правильности определения вертикальных реакций опор.

Плоскость xz. В этой плоскости к валу приложена только одна сила F_t, т.е. схема балки типовая [4, с. 60].

Определим реакции R_{Az} и R_{Bz} из выражений:

$$R_{Az} = \frac{F_t \cdot (b + c)}{a + b + c}, \quad R_{Bz} = \frac{F_t \cdot a}{a + b + c}.$$

Подставляя численные значения сил и линейных размеров, найдем: R_{Az} = 5,69 кН, R_{Bz}=4,27 кН.

Показываем реакции на расчетной схеме в действительном направлении.

7. Внутренние усилия на участках вала находим так же, как и в выше рассмотренных задачах, при прямом изгибе – см. решение задачи № 3, задание 1, при кручении – см. решение задачи № 2, задание 1. Строим эпюры изгибающих моментов. Рассматриваем вал как двухопорную балку, нагруженную сосредоточенными силами в двух плоскостях. Эпюры изгибающих моментов имеют вид наклонных прямых по всей длине балки. Изгибающий момент в сечении балки равен сумме моментов внешних сил, приложенных левее или правее данного сечения. Учитываем также свойства эпюр.

Рассмотрим вертикальную плоскость xy (рис.19, б), определяем изгибающие моменты M_z в характерных сечениях:

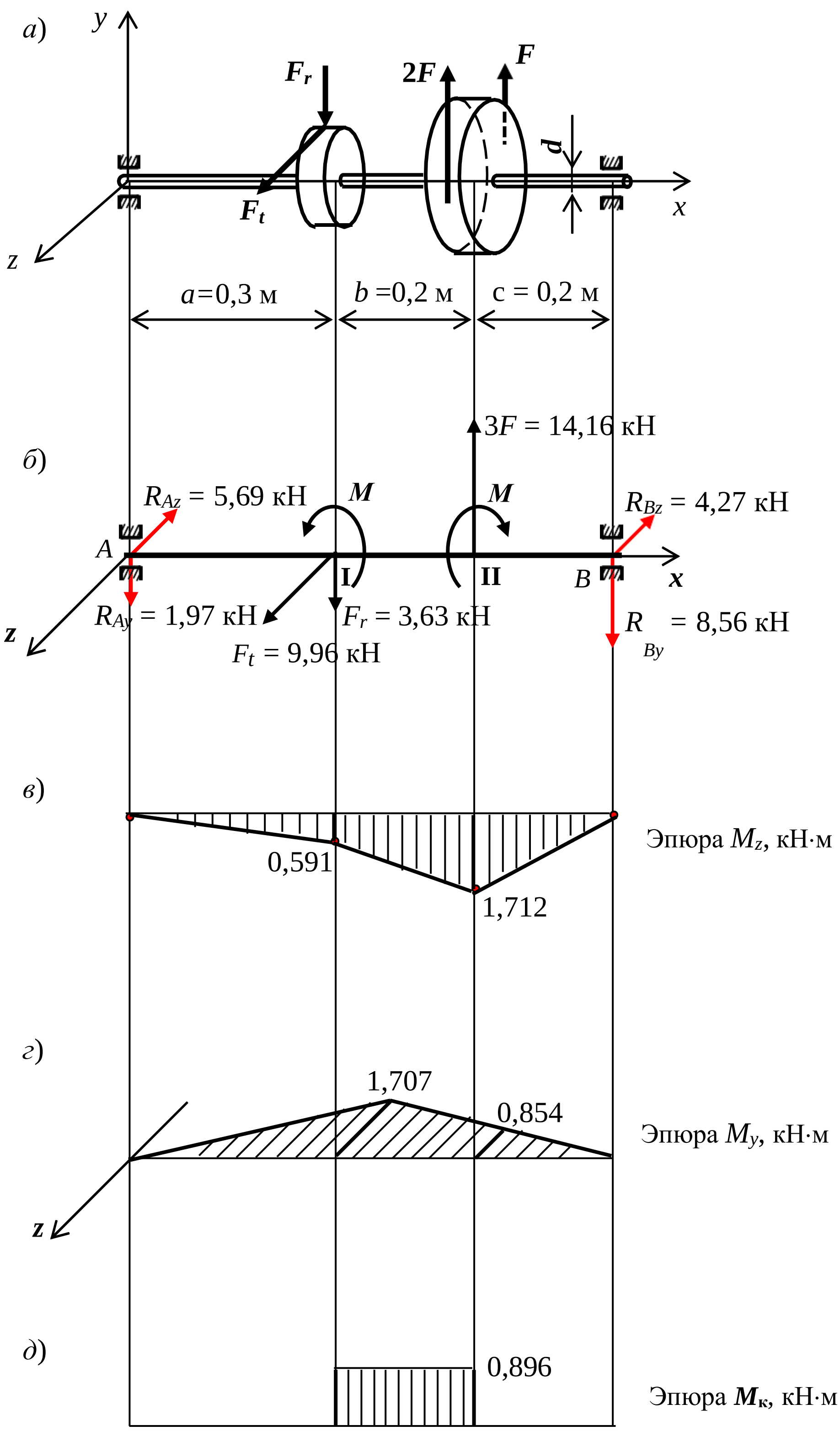
В сечениях над опорами A и B изгибающие моменты равны нулю

Изгибающий момент в сечении I (слева)

$$M_{z\mathrm{I}} = -R_{Ay} \cdot a = -1{,}97 \cdot 0{,}3 = -0{,}591 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Изгибающий момент в сечении II (справа)

$$M_{z\mathrm{II}} = -R_{By} \cdot c = -8{,}56 \cdot 0{,}2 = -1{,}712 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



а)
y
F_r
2F
F
d
x
F_t
z
a=0,3 м
b =0,2 м
c = 0,2 м
б)
3F = 14,16 кН
R_{Az} = 5,69 кН
M
M
R_{Bz} = 4,27 кН
A
I
II
B
x
z
R_{Ay} = 1,97 кН
F_r = 3,63 кН
R_{By} = 8,56 кН
F_t = 9,96 кН
в)
0,591
1,712
Эпюра M_z, кН·м
г)
1,707
0,854
Эпюра M_y, кН·м
z
д)
0,896
Эпюра $M_к$, кН·м

Рис. 19

Строим эпюру изгибающего момента M_z на сжатых волокнах, откладываем в сечениях I и II ординаты вниз и соединяем прямыми линиями полученные точки эпюры (рис. 19, *в*).

В горизонтальной плоскости действует одна сила F_t. Для типовой балки изгибающий момент в том сечении, в котором приложена сила можно найти по формуле [4, с. 60]:

$$M_{y\mathrm{I}} = \frac{F_t \cdot a \cdot (b + c)}{a + b + c} = \frac{9{,}96 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}2 + 0{,}2)}{0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2} = 1{,}707 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюру крутящего момента строим на участке между колесом и шкивом, $M_\text{к} = M$ (рис. 19, *д*).

8. Находим эквивалентный момент по третьей теории прочности в сечениях I и II:

$$M_{\text{экв}\,\mathrm{I}} = \sqrt{M_{z\mathrm{I}}^2 + M_{y\mathrm{I}}^2 + M_\text{к}^2} = \sqrt{0{,}591^2 + 1{,}707^2 + 0{,}896^2} =$$

$$= 2{,}016 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{экв}\,\mathrm{II}} = \sqrt{M_{z\mathrm{II}}^2 + M_{y\mathrm{II}}^2 + M_\text{к}^2} = \sqrt{1{,}712^2 + 0{,}854^2 + 0{,}896^2} =$$

$$= 2{,}112 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выбираем наибольшее значение эквивалентного момента:

$$M_{\text{экв}\,max} = 2{,}112 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. Записываем условие прочности

$\sigma_{\text{экв}\,max} = \frac{M_{\text{экв}\,max}}{W_\text{и}} \le [\sigma]$, где $W_\text{и} = \frac{\pi d^3}{32}$ - момент сопротивления круглого поперечного сечения вала при изгибе.

10. Из условия прочности определяем диаметр вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{экв}\,max}}{\pi\ \sigma}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2{,}112 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 6{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6{,}75 \text{ см} = 67{,}5 \text{ мм}.$$

11. Выполняем проверку правильности определения диаметра.

Осевой момент сопротивления при изгибе

$$W_и = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 6{,}75^3}{32} = 30{,}2\ см^3;$$

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_и = 60{,}4\ см^3.$$

Изгибающий момент в опасном сечении

$$M_{иmax} = \sqrt{M_{zII}^2 + M_{yII}^2} = \sqrt{1{,}712^2 + 0{,}854^2} = 1{,}91\ кНм.$$

Наибольшее нормальное напряжение в опасной точке опасного сечения I

$$\sigma_{max} \frac{M_{иmax}}{W_и} = \frac{1{,}91 \cdot 10^3}{30{,}2 \cdot 10^{-6}} = 63{,}2 \cdot 10^6 Па = 63{,}2\ МПа.$$

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке опасного сечения вала

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{w_p} = \frac{896}{60{,}4 \cdot 10^{-6}} = 14{,}8 \cdot 10^6\ Па = 14{,}8\ МПа.$$

Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{экв\,max} = \sqrt{\sigma_{и\,max}^2 + 4r_{max}^2} = \sqrt{63{,}2^2 + 4 \cdot 14.8^2} = 69{,}8\ МПа.$$

Определим несовпадение напряжений $\sigma_{экв\,max}$ и $[\sigma]$:

$$\Delta\sigma = \frac{[\sigma] - \sigma_{экв\,max}}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{70 - 69{,}8}{70} \cdot 100\% = 0{,}3\%.$$

Несовпадение допускаемого и наибольшего эквивалентного напряжений возникает за счет округления результатов вычислений. В проектной практике найденное значение диаметра округляют до стандартного. Примем $d_{ст}$ =70 мм. За счет увеличения диаметра до стандартного значения запас прочности вала увеличивается.

Стандартный ряд: 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110….

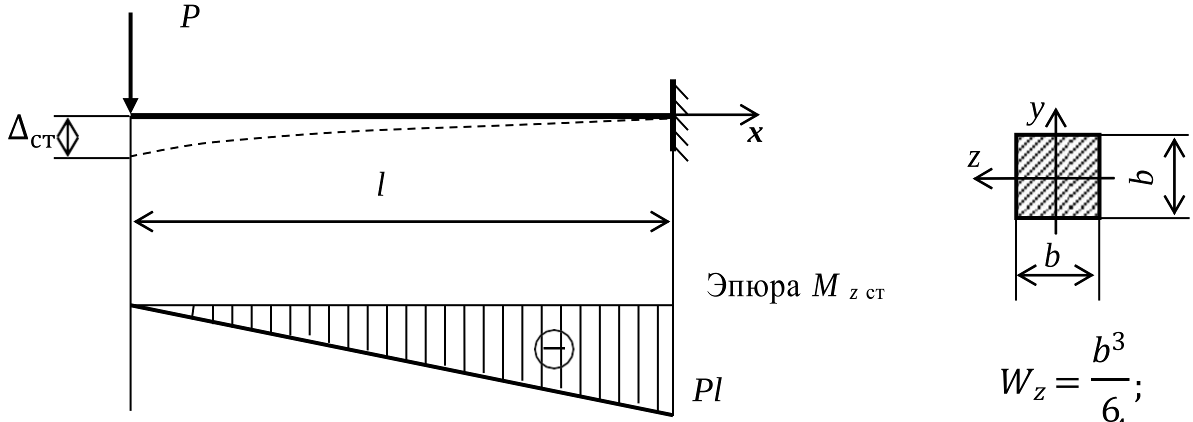
Ответ: Расчетное значение диаметра вала d = 67,3 мм, стандартное d =70 мм.

Задача № 3. *Тема задачи*: Расчет на прочность балки при ударном нагружении.

На балку с квадратным поперечным сечением с высоты h падает груз весом P. Требуется из условия прочности при ударном нагружении найти размер b поперечного сечения балки. Данные для l=3 м, P=200 Н, h=0,5 м, $E = 2 \cdot 10^6$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа. При расчете принять E=2·10^5 МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

1. *Статический расчет балки*. Прикладываем вес падающего груза к балке статически, строим эпюру изгибающего момента $M_{z\,\text{ст}}$ (рис. 22).



$$W_z = \frac{b^3}{6};$$

$$I_Z = \frac{b^4}{12}$$

Рис. 22

Решаем в общем виде, расчетные формулы для типовой балки берем табличные [4, с. 58].

Определяем наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении балки при статическом нагружении:

$$\sigma_{\text{ст}\,max} = \frac{M_{z\,max}}{W_z} = \frac{6Pl}{b^3}. \quad (1)$$

Находим статический прогиб в месте падения груза, на свободном конце балки:

$$\Delta_{ст} = \frac{Pl^3}{3EI_z} = \frac{12Pl^3}{3Eb^4} = \frac{4Pl^3}{Eb^4}. \qquad (2)$$

2. Динамический коэффициент в упрощенном виде:

$$k_{д} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}. \qquad (3)$$

3. Условие прочности при ударном нагружении:

$$\sigma_{д max} = \sigma_{ст max} \cdot k_{д} \leq [\sigma]. \qquad (4)$$

Подставим в условие (4) выражения (1), (2), (3):

$$\sigma_{д max} = \frac{6Pl}{b^3} \cdot \sqrt{\frac{2h \cdot 3EI_z}{Pl^3}} = \frac{6Pl}{b^3} \cdot \sqrt{\frac{2h \cdot 3Eb^4}{12Pl^3}} = \frac{6}{b} \cdot \sqrt{\frac{hEP}{2l}} \leq \sigma .$$

Отсюда $b \geq \frac{6}{\sigma} \sqrt{\frac{hEP}{2l}} = \frac{6}{160 \cdot 10^6} \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 200}{2 \cdot 3}} = 0{,}0685$ м $= 6{,}85$ см.

4. Проверочный расчет. Значение размера b является приближенным. Проверим выполнение условия прочности при этом размере b=6,85 см.

$$W_z = \frac{b^3}{6} = \frac{6{,}85^3}{6} = 53{,}57 \text{ см}^3;$$

$$I_Z = \frac{b^4}{12} = \frac{6{,}85^4}{12} = 183{,}5 \text{ см}^4;$$

$$\sigma_{ст max} = \frac{M_{z\,max}}{W_z} = \frac{Pl}{W_z} = \frac{200 \cdot 3}{53{,}57 \cdot 10^{-6}} = 11{,}2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11{,}2 \text{ МПа}$$

$$\Delta_{ст} = \frac{Pl^3}{3EI_z} = \frac{200 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 183{,}5 \cdot 10^{-8}} = 4{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}5}{4{,}9 \cdot 10^{-3}}} = 15{,}3;$$

$\sigma_{дmax} = k_д \cdot \sigma_{стmax} = 15{,}3 \cdot 11{,}2 = 171{,}4$ МПа $> [\sigma] = 160$ МПа - условие прочности не выполнено, максимальное динамическое напряжение превышает допускаемое напряжение на 7,1 %, что не допускается.

5. *Второе приближение*. Увеличим размер b, примем b = 7 см. Вычислим все необходимые величины для этого значения b:

$W_z = 57{,}2$ см^3; $I_z = 200$ см^4; $\sigma_{стmax} = 10{,}49$ МПа

$\Delta_{ст} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$м; $k_д = 15{,}94$; $\sigma_{дmax} = 167{,}2$ МПа;

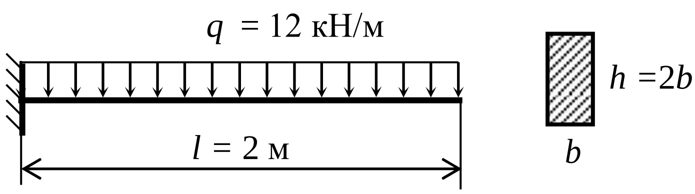
$\Delta\sigma = 4{,}5\ \% \leq 5\ \%$, что допустимо.

Принимаем размер b = 7 см.

Ответ: b=7см.

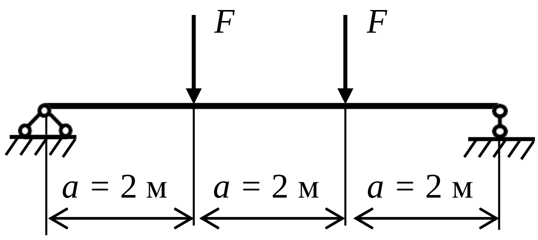
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Задача № 1. Определить размеры прямоугольного сечения деревянной балки из условия прочности по нормальным напряжениям, при расчете принять [σ] = 10 МПа.

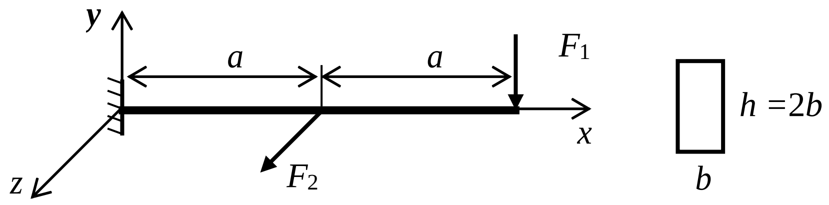


Задача № 2. Для стальной балки из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать номер двутаврового сечения.

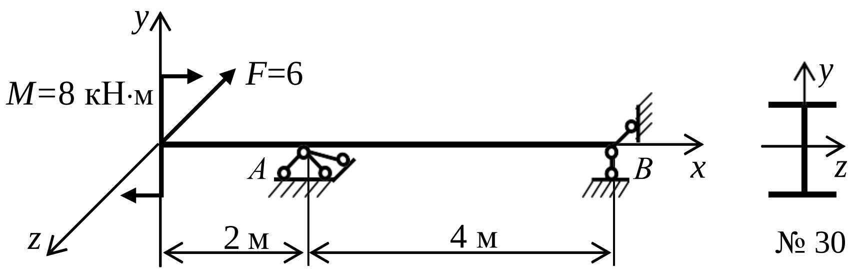
При расчете принять F = 60 кН, [σ] = 200 МПа



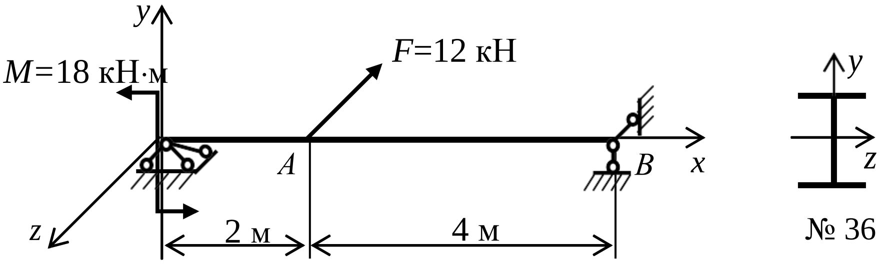
Задача № 3. На балку действуют две силы: F_1 =12 кН в вертикальной плоскости *xy* и F_2 = 8 кН в горизонтальной плоскости *xz*. Из условия прочности при косом изгибе определить размеры прямоугольного сечения балки с соотношением сторон *h/b* = 2.
При расчете принять *a* = 2 м; [σ] = 160 МПа.



Задача № 4. Для стальной балки требуется:
- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки, определить положение опасного сечения;
- проверить выполнение условия прочности для заданного двутаврового сечения № 30 при [σ]=180 МПа.

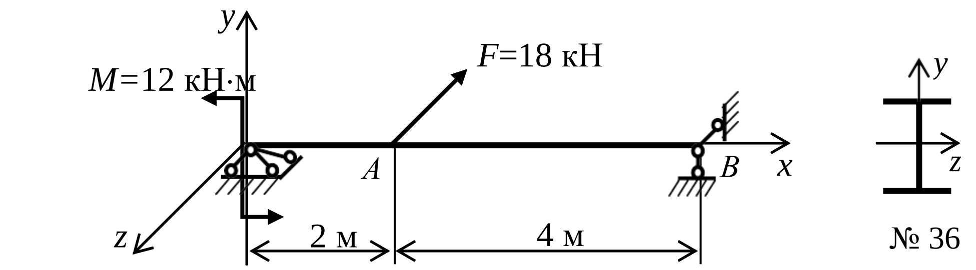


Задача № 5. Для балки, изготовленной из прокатного двутавра:
- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки, определить положение опасного сечения;
- проверить выполнение условия прочности для заданного двутаврового сечения № 36 при [σ]=160 МПа.



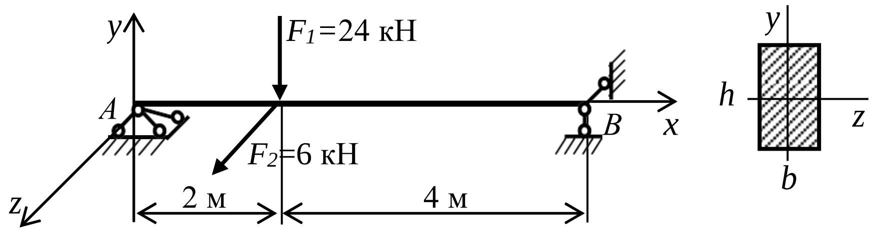
Задача № 6. Для двутавровой балки:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки и определить положение опасного сечения;
- проверить выполнение условия прочности для заданного двутаврового сечения № 36 при $[\sigma]$=160 МПа.



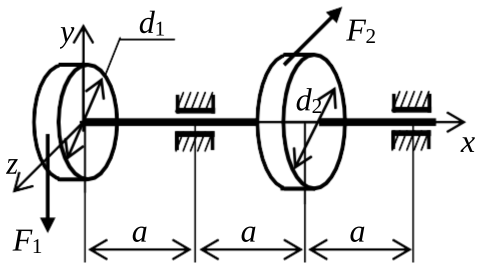
Задача № 7. Для балки с прямоугольным поперечным сечением требуется:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки, определить положение опасного сечения;
- из условия прочности найти размеры прямоугольного поперечного сечения балки при следующих данных: h/b = 2, $[\sigma]$=160 МПа



Задача № 8. Для вала механической передачи:

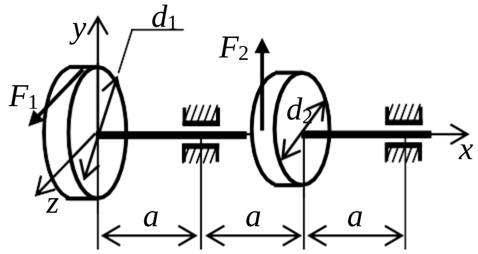
- построить эпюры изгибающих и крутящего моментов и определить положение опасного сечения;
- определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 160$ МПа.



Данные для расчета: $F_1 = 12$ кН, $F_2 = 6$ кН,
$d_1 = 100$ мм, $d_2 = 200$ мм, $a = 0{,}3$м.

Задача № 9. Для вала механической передачи требуется:

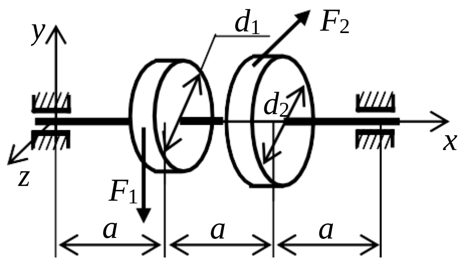
- построить эпюры изгибающих и крутящего моментов и определить положение опасного сечения;
- определить диаметр вала по третьей теории прочности.



Данные для расчета: $F_1 = 4$ кН, $F_2 = 8$ кН, $d_1 = 100$ мм, $d_2 = 50$ мм, $a = 0{,}2$ м; $[\sigma] = 160$ МПа.

Задача № 10. Вал, на который насажены два шкива, вращается с постоянной угловой скоростью. Требуется:

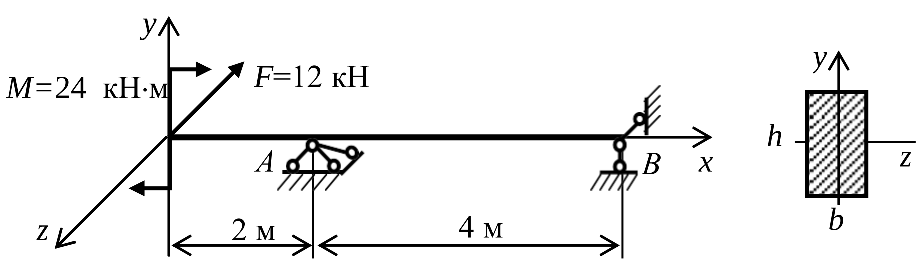
- построить эпюры изгибающих и крутящего моментов и определить положение опасного сечения;
- определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 160$ МПа.



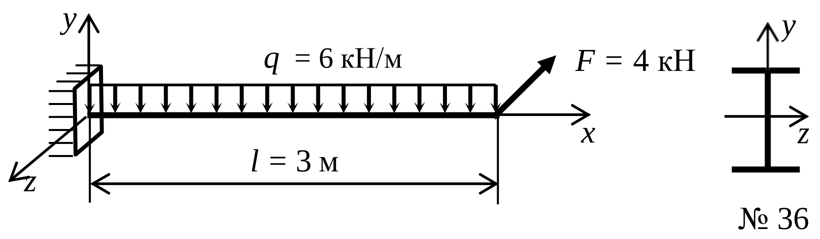
Данные для расчета: $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 5$ кН, $d_1 = 60$ мм, $d_2 = 80$ мм, а = 0,3 м.

Задача № 11. Балка нагружена сосредоточенной силой F и парой сил с моментом M. Требуется:

- построить эпюры внутренних усилий;
- из условия прочности определить размеры прямоугольного поперечного сечения балки При расчете принять $[\sigma] = 10$ МПа, $h/b = 2$.

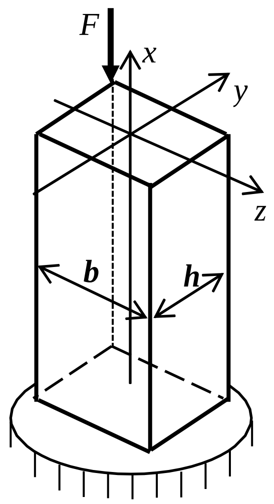


Задача № 12. Для балки, изображенной на рисунке:
- построить эпюры внутренних усилий, определить положение опасного сечения.
- проверить выполнение условия прочности для двутавровой балки № 36 при $[\sigma] = 160$ МПа.

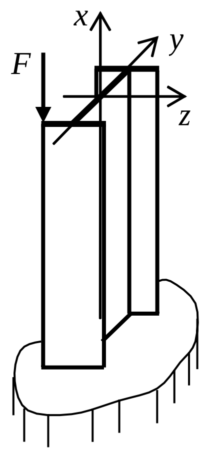


Задача № 13. Стержень с прямоугольным поперечным сечением сжимается внецентренно силой F. Материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Требуется:

- найти геометрические характеристики поперечного сечения стержня;
- определить положение опасных точек;
- записать условия прочности для опасных точек в растянутой и сжатой частях сечения;
- из условий прочности найти силу F;
- построить ядро сечения.



Данные для расчета: $[\sigma]_{\text{сж}} = 16$ МПа, $[\sigma]_{\text{р}} = 1$ МПа, $h = 0{,}6$ м, $b = 1$ м;

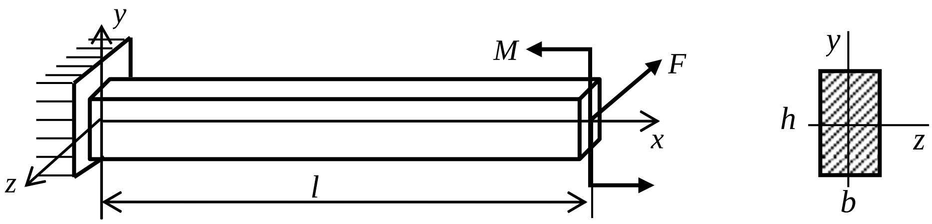


Задача № 14. Определить наибольшее напряжение сжатия в стержне, внецентренно сжатом силой $F = 160$ кН.

Поперечное сечение стержня - двутавр № 40.

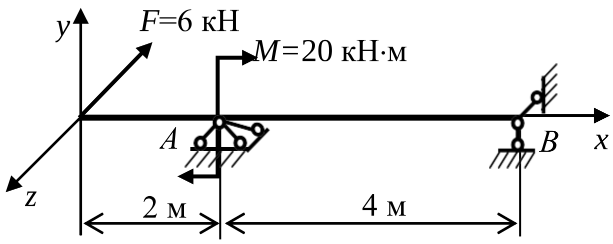
Задача № 15. Для балки, изображенной на рисунке:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки и определить положение опасного сечения;
- из условия прочности найти размеры прямоугольного поперечного сечения балки при следующих данных: $h/b = 2$; $F = 4$ кН, $M = 12$ кН·м; $l = 4$ м; $[\sigma] = 10$ МПа.



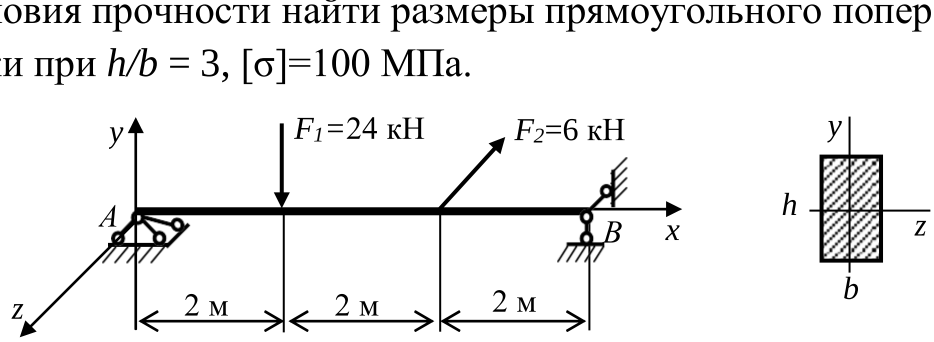
Задача № 16. Для балки требуется:

- определить внутренние усилия на участках балки и построить эпюры в главных плоскостях балки;
- определить положение опасного сечения;
- из условия прочности подобрать номер двутавровой балки при $[\sigma]=200$ МПа.



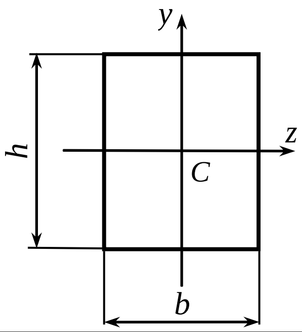
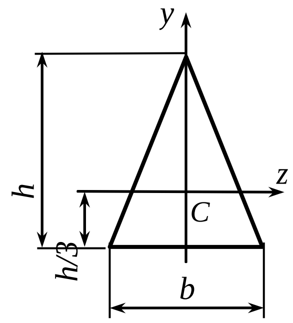
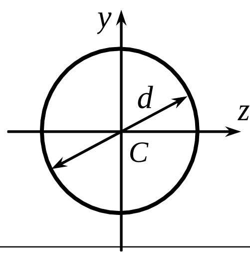
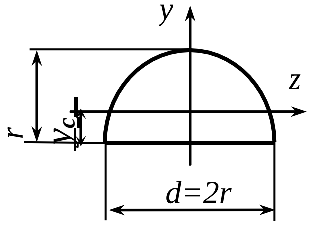
Задача № 17. Для балки, изображенной на рисунке:

- определить внутренние усилия на участках балки;
- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки,
- определить положение опасного сечения;
- из условия прочности найти размеры прямоугольного поперечного сечения балки при $h/b = 3$, $[\sigma]=100$ МПа.



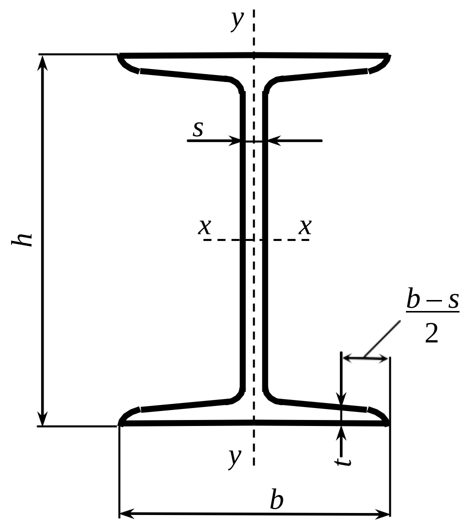
Геометрические характеристики простых сечений

h – высота сечения; b – ширина сечения;
A – площадь поперечного сечения;
C – центр тяжести сечения;
y, z – главные центральные оси сечения;
I_z, I_y – осевые моменты инерции сечения.

Фигура	A	J_{azz}	J_{ay}
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$
 $y_C = 0{,}424r$	$\frac{\pi r^2}{2}$	$0{,}11r^4$	$\frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}$

Приложение 2

ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ГОСТ 8239-89)



h - высота двутавра

b - ширина полки

s - толщина стенки

t - средняя толщина полки

A - площадь поперечного сечения

I - момент инерции

W - момент сопротивления

S - статический момент полусечения

i - радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см^2	I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54